التحليل التنسوري

ظهر مفهوم التنسور على يد العالم غاوس أثناء دراسته للهندسة التفاضلية ويعتبر العالم هاملتون أول من أطلق عليه هذه التسمية في عام ١٨٤٦.
تطور استخدام التنسور على يد العالم ريتشي في حساب التفاضل والتكامل ١٨٩٨
استخدم التنسور في الفيزيولوجيا الحرجة في نظرية كوينز وفي الجبر المجرد ١٩٠٠
نشأ مفهوم التحليل التنسوري في مطلع القرن العشرين واستخدم في النظرية النسبية لآينشتاين
وتطور بشكل سريع هذا المفهوم ليستخدم في مختلف المجالات الرياضية (المعادلات التفاضلية والميكانيك بأنواعه ..... وفي مختلف أنواع الهندسات. وله استخدامات في العلوم الطبية وغيرها.

مقدمة: ليكن V_n فضاء متجهي قاعدته $(e_i)_{i=1,\dots,n} = (e_1, \dots, e_n)$
نحن نعلم أن أي متجه $x \in V_n$ يكتب بصورة وحيدة على النحو:

$$(1) \quad x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \; ; \; x^i \in R$$

العلاقة (1) نكتب اختصاراً بأن نحذف إشارة $\sum$ على اعتبار أنه يوجد دليل علوي يماثل الدليل السفلي (أي توجد عملية جمع من $i=1$ إلى $i=n$ دون أن نذكرها).

$$(2) \quad x = x^i e_i$$

الآن نفرض $(e_{j'})$ قاعدة جديدة للفضاء V_n حيث:

$$(e_i)(e_{j'}) = C^i_{j'}$$

حيث $C^i_{j'}$ هي مصفوفة الانتقال من القاعدة الأصلية $(e_i) \to e_{j'}$

$$e_i \cdot e_j = \delta_i^j \begin{cases} 0 \; ; & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (\delta_i^j \text{ دلتا كرونيكر})$$

كذلك يكون: $(e_{i'})(e_{j'}) = \delta_{i'}^{j'}$

ويكون:

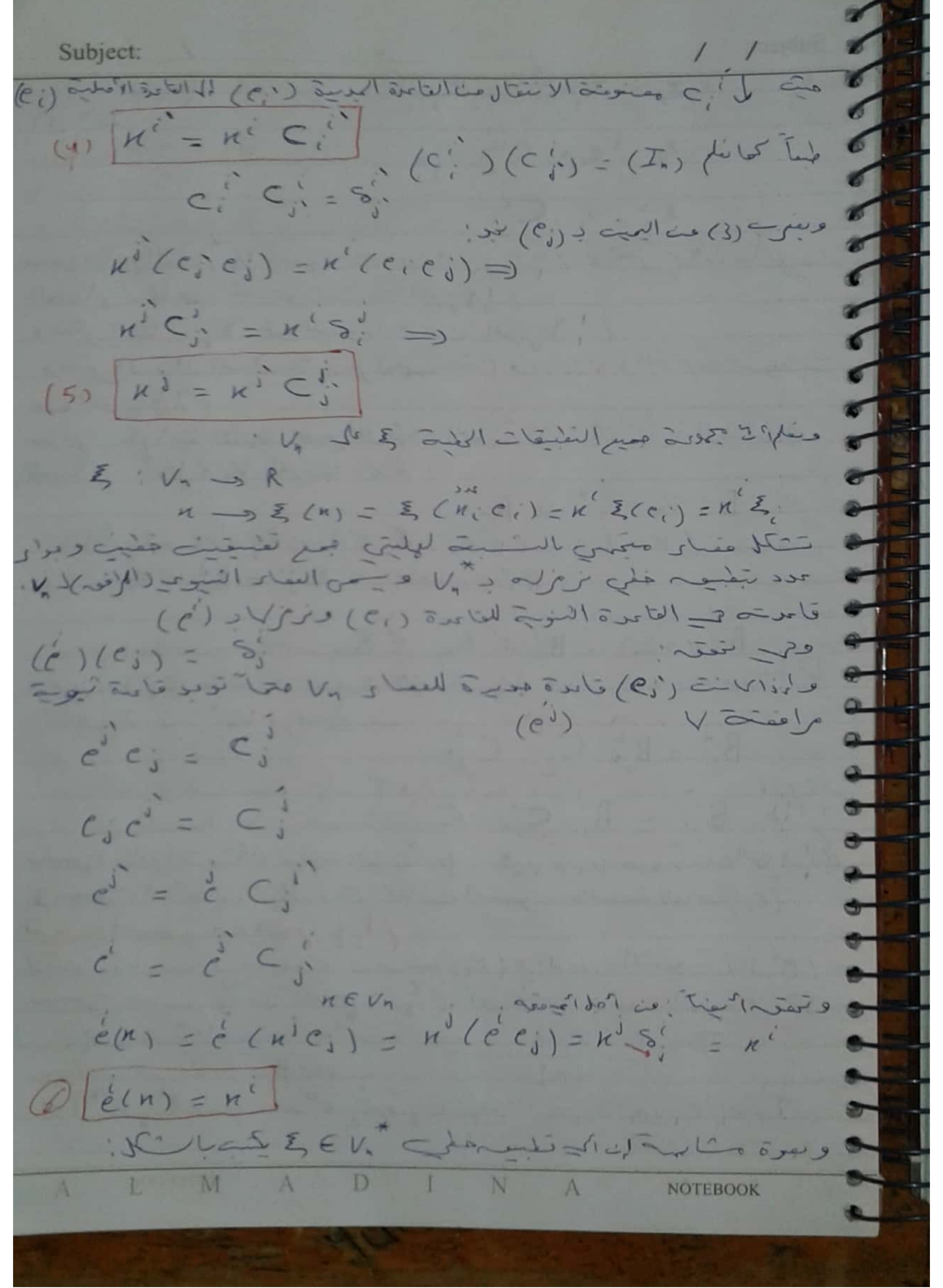
$$(3) \quad x = x^{j'} \cdot e_{j'} = x^i e_i$$

الآن نضرب (3) من اليمين بـ $e_{i'}$ نجد:

$$(x^{j'} e_{j'}) e_{i'} = x^i e_i e_{i'}$$

$$x^{j'} (e_{j'} e_{i'}) = x^i (e_i e_{i'})$$

$$x^{j'} \delta_{j'}^{i'} = x^i C_i^{i'}$$



حيث $C_i^{i'}$ مصفوفة الانتقال من القاعدة الجديدة $(e_{i'})$ إلى القاعدة الأصلية (e_i)

(4) $x^{i'} = x^i C_i^{i'}$

علماً كما نعلم $(C_i^{i'})(C_{j'}^{i}) = (I_n)$

$$C_i^{i'} C_{j'}^{i} = \delta_{j'}^{i'}$$

وبضرب (3) من اليمين بـ (e_j) نجد:

$$x^{j'}(e_{j'} e_j) = x^i (e_i e_j) \Rightarrow$$

$$x^{j'} C_{j'}^{j} = x^i \delta_i^j \Rightarrow$$

(5) $x^j = x^{j'} C_{j'}^{j}$

ونعلم أن مجموعة جميع التطبيقات الخطية ξ على V_n:

$$\xi : V_n \to R$$

$$x \to \xi(x) = \xi(x^i e_i) = x^i \xi(e_i) = x^i \xi_i$$

تشكل فضاء متجهي بالنسبة لعمليتي جمع تطبيقين خطيين وضرب عدد بتطبيق خطي نرمز له بـ V_n^* ويسمى الفضاء الثنوي (المرافق) لـ V_n.
قاعدته هي القاعدة الثنوية للقاعدة (e_i) ونرمز لها بـ (e^i)
وهي تحقق:

$$(e^i)(e_j) = \delta_j^i$$

وإذا كانت $(e_{j'})$ قاعدة جديدة للفضاء V_n فحتماً توجد قاعدة ثنوية مرافقة لها $(e^{j'})$

$$e^{i'} e_j = C_j^{i'}$$

$$e_j e^{i'} = C_j^{i'}$$

$$e^{i'} = e^j C_j^{i'}$$

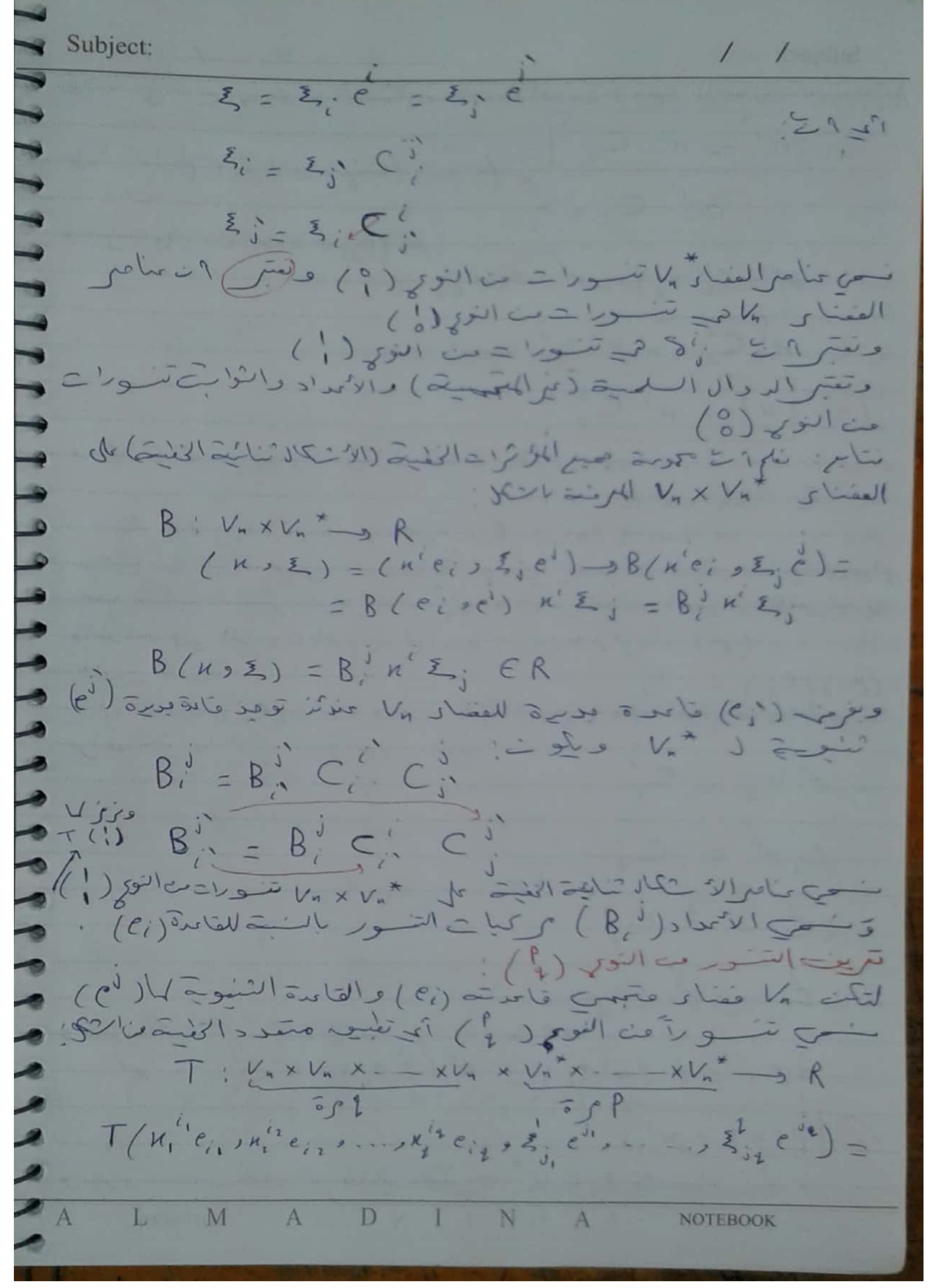
$$e^i = e^{j'} C_{j'}^{i}$$

وتحقق أيضاً: من أجل أي متجه $x \in V_n$

$$e^i(x) = e^i(x^j e_j) = x^j(e^i e_j) = x^j \delta_j^i = x^i$$

(6) $e^i(x) = x^i$

وبصورة مشابهة أن أي تطبيق خطي $\xi \in V_n^*$ يكتب بالشكل:


Subject: / /

$$\xi = \xi_i e^i = \xi_{j'} e^{j'}$$

أي أن:

$$\xi_i = \xi_{j'} C^{j'}_i$$

$$\xi_{j'} = \xi_i C^i_{j'}$$

نسمي عناصر الفضاء V_n^* تنسورات من النوع $\binom{0}{1}$ ونعتبر أن عناصر الفضاء V_n هي تنسورات من النوع $\binom{1}{0}$

ونعتبر أن δ^i_j هي تنسورات من النوع $\binom{1}{1}$

ونعتبر الدوال السلمية (غير المتجهية) والأعداد والثوابت تنسورات من النوع $\binom{0}{0}$

مثال: نعلم أن مجموعة جميع المؤثرات الخطية (الأشكال ثنائية الخطية) على الفضاء $V_n \times V_n^*$ المعرفة بالشكل:

$$B : V_n \times V_n^* \to R$$

$$(x, \xi) = (x^i e_i, \xi_j e^j) \to B(x^i e_i, \xi_j e^j) =$$
$$= B(e_i, e^j)\, x^i \xi_j = B_i^j x^i \xi_j$$

$$B(x, \xi) = B_i^j x^i \xi_j \in R$$

ونفرض $(e_{i'})$ قاعدة جديدة للفضاء V_n عندئذ توجد قاعدة جديدة $(e^{j'})$ ثنوية لـ V_n^* ويكون:

$$B_i^j = B_{i'}^{j'} C_i^{i'} C_{j'}^j$$

ونرمز لـ $T\binom{1}{1}$

$$B_{i'}^{j'} = B_i^j C_{i'}^i C_j^{j'}$$

نسمي عناصر الأشكال ثنائية الخطية على $V_n \times V_n^*$ تنسورات من النوع $\binom{1}{1}$

ونسمي الأعداد (B_i^j) مركبات التنسور بالنسبة للقاعدة (e_i).

تعريف التنسور من النوع $\binom{p}{q}$:

لتكن V_n فضاء متجهي قاعدته (e_i) والقاعدة الثنوية لها (e^j)

نسمي تنسوراً من النوع $\binom{p}{q}$ أي تطبيق متعدد الخطية كالتالي:

$$T : \underbrace{V_n \times V_n \times \cdots \times V_n}_{q \text{ مرة}} \times \underbrace{V_n^* \times \cdots \times V_n^*}_{p \text{ مرة}} \to R$$

$$T(x_1^{i_1} e_{i_1}, x_2^{i_2} e_{i_2}, \ldots, x_q^{i_q} e_{i_q}, \xi^1_{j_1} e^{j_1}, \ldots, \xi^p_{j_p} e^{j_p}) =$$

$$= T(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}, e^{j_1}, \dots, e^{j_p}) x_1^{i_1} \dots x_q^{i_q} \xi^1_{j_1} \dots \xi^p_{j_p}$$

$$= T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} x_1^{i_1} \dots x_q^{i_q} \xi^1_{j_1} \dots \xi^p_{j_p} \in R$$

نسمي الأعداد $T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q}$ مركبات التنسور $T\binom{p}{q}$ بالنسبة للقاعدة (e_i) وعددها $n^{p \cdot q}$

حيث:

$$i_1, \dots, i_q = 1, \dots, n$$

$$j_1, \dots, j_p = 1, \dots, n$$

نسمي الأعداد $1, \dots, q$ مرتبة موافقة التغير.

نسمي الأعداد $1, \dots, p$ مرتبة مخالف التغير

وطبعاً إذا أخذنا $(e_{i'})$ قاعدة جديدة للفضاء V_n فإن:

$$(7) \quad T^{k'_1 \dots k'_p}_{l'_1 \dots l'_q} = T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} C^{i_1}_{l'_1} \dots C^{i_q}_{l'_q} \cdot C^{k'_1}_{j_1} \dots C^{k'_p}_{j_p}$$

العلاقة (7) تسمى علاقة التحويل التنسوري من (e_i) إلى $(e_{i'})$

ملاحظة: إذا كانت مركبات تنسور معدومة بالنسبة لقاعدة ما فإنها تكون كذلك بالنسبة لأي قاعدة أخرى.

مبرهنة دون برهان: من أجل أي عددين صحيحين موجبين p, q يوجد تنسور من النوع $\binom{p}{q}$ بالنسبة لقاعدة (e_i) للفضاء V_n.

تعريف تساوي تنسورين:

ليكن $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ و $S^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}$

تنسورين من النوع $\binom{p}{q}$ نقول عن T و S أنهما متساويان ونكتب $T = S$ إذا تساوت مركباتهما بالنسبة للقاعدة (e_i) للفضاء V_n

أي إذا كان:

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = S^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}$$

$$i_m, k_m = \overline{1,n} \qquad m = 1, \dots, p$$

$$j_r, l_r = 1, \dots, n \qquad r = 1, \dots, q$$

تعريف التنسور الصفري:

التنسور الصفري من النوع $\binom{p}{q}$ هو تنسور مركباته معدومة بالنسبة لقاعدة ما وطبعاً تكون مركبات التنسور الصفري معدومة بالنسبة لأي قاعدة أخرى (حسب قاعدة التحويل التنسوري).

العمليات الجبرية على التنسورات:

(١) جمع تنسوريين: ليكن $T^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p}$ ، $S^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}$

تنسوريين من النوع $\binom{p}{q}$ إن حاصل جمع التنسورين T و S هو تنسور من النوع ذاته $\binom{p}{q}$

$$U^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + S^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}$$

وبصورة مشابهة يكون التركيب الخطي للتنسورين T و S هو تنسور من النوع ذاته

$$U^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \alpha T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + \beta S^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}$$

يسمى التنسور $-T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ معكوس التنسور $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$

جداء تنسورين (الجداء التنسوري):

ليكن $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ تنسور من النوع $\binom{p}{q}$ و $S^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_r}$ تنسور من النوع $\binom{m}{r}$ إن حاصل جداء التنسورين T و S هو تنسور من النوع $U\binom{p+m}{q+r}$ يعرف بالشكل:

$$U^{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+m}}_{j_1\cdots j_q j_{q+1}\cdots j_{q+r}} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \cdot S^{i_{p+1}\cdots i_{p+m}}_{j_{q+1}\cdots j_{q+r}}$$

مثال: في R^2 التنسور T_i المعرف بالشكل: $T_i (T_1 = 0 , T_2 = -1)$

التنسور S^j المعرف بالشكل: $S^j = (S^1 = -3 , S^2 = 2)$

$$U_i^j = T_i \cdot S^j = (U_1^1 = T_1 \cdot S^1 = 0 , U_2^1 = T_2 \cdot S^1 = 3$$
$$U_1^2 = T_1 \cdot S^2 = 0 , U_2^2 = S_2 \cdot T^2 = -2)$$

نرمز للجداء التنسوري بـ: $U = T \otimes S$

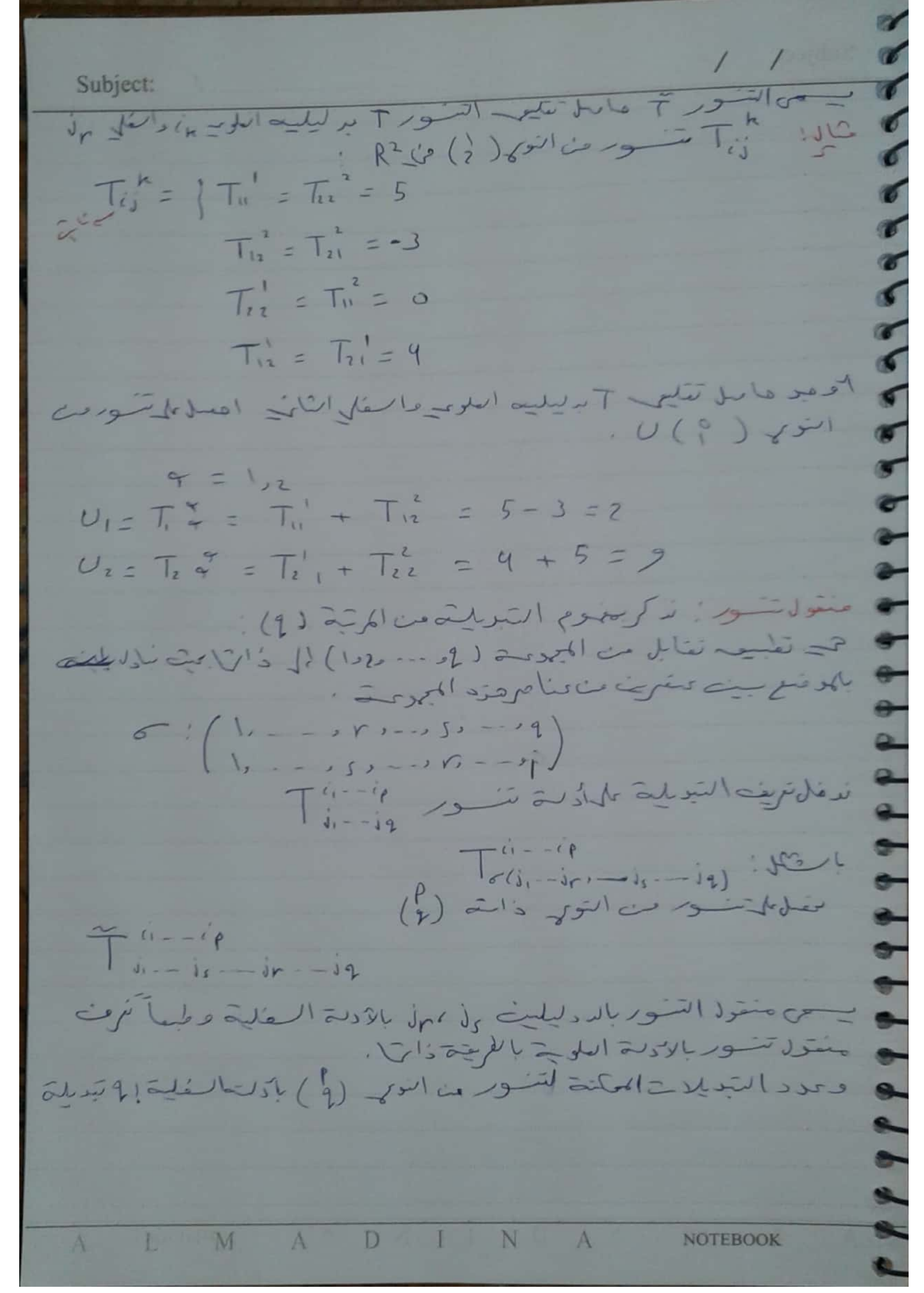
ويحقق الخواص الآتية: $T \otimes S \neq S \otimes T$ ليس تبديلي في الحالة العامة

تقليص تنسور: ليكن لدينا التنسور $T^{i_1\cdots i_k\cdots i_p}_{j_1\cdots j_r\cdots j_q}$ تنسوراً من النوع $\binom{p}{q}$

فإذا فرضنا $i_k = j_r = \alpha$ (ساوينا الدليلين i_k العلوي مع j_r السفلي)

نحصل على تنسور $\tilde{T}^{i_1\cdots\alpha\cdots i_p}_{j_1\cdots\alpha\cdots j_q}$ من النوع $\binom{p-1}{q-1}$ وذلك لأن:

$$\tilde{T}^{i_1\cdots\alpha\cdots i_p}_{j_1\cdots\alpha\cdots j_q} = T^{i_1\cdots 1\cdots i_p}_{j_1\cdots 1\cdots j_q} + T^{i_1\cdots 2\cdots i_p}_{j_1\cdots 2\cdots j_q} + \cdots + T^{i_1\cdots n\cdots i_p}_{j_1\cdots n\cdots j_q}$$



يسمى التنسور $\tilde{T}$ حاصل تقليص التنسور T بدليليه العلوي i_k والسفلي j_r

مثال: T_{ij}^{k} تنسور من النوع $\binom{1}{2}$ في R^2 :

$$T_{ij}^{k} = \begin{cases} T_{11}^{1} = T_{22}^{2} = 5 \\ T_{12}^{2} = T_{21}^{2} = -3 \\ T_{22}^{1} = T_{11}^{2} = 0 \\ T_{12}^{1} = T_{21}^{1} = 4 \end{cases}$$

أوجد حاصل تقليص T بدليليه العلوي والسفلي الثاني احصل على تنسور من النوع $\binom{0}{1}$ U .

$q = 1, 2$

$$U_1 = T_{1q}^{q} = T_{11}^{1} + T_{12}^{2} = 5 - 3 = 2$$

$$U_2 = T_{2q}^{q} = T_{21}^{1} + T_{22}^{2} = 4 + 5 = 9$$

منقول تنسور: نذكر بمفهوم التبديلة من المرتبة q :

هي تطبيق تقابل من المجموعة $(1, 2, \dots, q)$ إلى ذاتها بحيث نبادل بالموضع بين عنصرين من عناصر هذه المجموعة.

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1, \dots, r, \dots, s, \dots, q \\ 1, \dots, s, \dots, r, \dots, q \end{pmatrix}$$

ندخل تعريف التبديلة على أدلة تنسور $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

بالشكل: $T^{i_1 \dots i_p}_{\sigma(j_1 \dots j_r \dots j_s \dots j_q)}$

نحصل على تنسور من النوع ذاته $\binom{p}{q}$

$$\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s \dots j_r \dots j_q}$$

يسمى منقول التنسور بالدليلين j_r, j_s بالأدلة السفلية وطبعاً نعرف منقول تنسور بالأدلة العلوية بالطريقة ذاتها.

وعدد التبديلات الممكنة لتنسور من النوع $\binom{p}{q}$ بأدلته السفلية $q!$ تبديلة